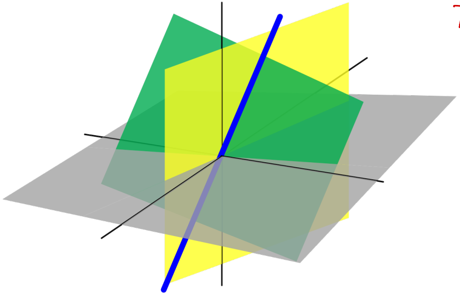
Algèbre Linéaire

Cours du 15 octobre

Jérôme Scherer

ttpoll.eu

727455



3.3.2 Les formules de Cramer

Soit A une matrice $n \times n$ inversible. Pour tout vecteur $\overrightarrow{b}$ on pose

$$A_i(\overrightarrow{b}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a}_1 & \dots & \overrightarrow{a}_{i-1} & \overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}_{i+1} & \dots & \overrightarrow{a}_n \end{pmatrix}$$

Théorème

La seule solution du système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est donnée par la formule

$$\boxed{x_i = \frac{\det A_i(\overrightarrow{b})}{\det A}}$$

Preuve. Soit $B_i = (I_n)_i(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_{i-1}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{e}_n)$.

La ligne L_i est constituée de zéros, sauf le coefficient x_i en position (i, i), si bien que $\det(B_i) = x_i$.

PREUVE. A étant inversible, la solution unique est

$$\vec{x} = A^{-1}\cdot\vec{b}$$

Soit $B_i = (I_n)_i(\vec{x}) = (\vec{e_1} \cdots \vec{e_{i-1}}\,\vec{x}\,\vec{e_{i+1}} \cdots \vec{e_n})$

$$\det B_i = x_i \qquad \text{en dév. selon } L_i$$

On calcule $A\cdot B_i = A\cdot(\vec{e_1} \cdots \vec{x} \cdots \vec{e_n}) \overset{\text{déf}}{\underset{\text{de}\,\cdot}{=}}$

$$= (A\cdot\vec{e_1}, \dots, A\vec{x}, \dots A\vec{e_n})$$

$$\overset{A\vec{x}=\vec{b}}{=} (\vec{a_1}, \dots \vec{b} \dots \vec{a_n})$$

$$= A_i(\vec{b})$$

Ainsi $\det(A_i(\vec{b})) = \det(A\cdot B_i) \underset{\text{multiplicatif}}{\overset{\det}{=}} \det A\cdot\underbrace{\det B_i}_{x_i}$

En divisant par $\det A \neq 0$, on trouve $x_i = \dfrac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}$. $\square$

3.3.3 La matrice des cofacteurs

Soit A une matrice $n \times n$ et A_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne de A.

Définition

Le cofacteur $C_{ij} = (-1)^{i+j} \mathrm{det} A_{ij}$.

Définition

La comatrice ou matrice des cofacteurs de A est la matrice

$$\mathrm{Com} A = (C_{ij})_{n \times n}$$

3.3.4 Cofacteurs et inverse

Soit A une matrice $n \times n$ inversible. On pose comme avant

$i^{\text{è}}$ ligne

$$A_j(\overrightarrow{e}_i) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a}_1 & \dots & \overrightarrow{a}_{j-1} & \overrightarrow{e}_i & \overrightarrow{a}_{j+1} & \dots & \overrightarrow{a}_n \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Formules de Cramer

La seule solution du système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e}_i$ est donnée par la formule

$$\boxed{x_j = \frac{\det A_j(\overrightarrow{e}_i)}{\det A}}$$

De plus, en développant le déterminant selon la j-ème colonne on calcule

$$\det A_j(\overrightarrow{e}_i) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

3.3.4 Formule pour l'inverse

Soit A une matrice $n \times n$.

Théorème

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{Com} A)^T}$$

Cette formule généralise la formule pour l'inverse d'une matrice 2×2. En effet si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

- $C_{11} = (-1)^{1+1}\det(d) = d$
- $C_{12} = (-1)^{1+2}\det(c) = -c$
- $C_{21} = (-1)^{2+1}\det(b) = -b$
- $C_{22} = (-1)^{2+2}\det(a) = a$

Par conséquent $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\mathrm{Com} A)^T = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

3.3.4 Démonstration

La i-ème colonne de A^{-1} est la seule solution du système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e}_i$ qui est donnée par la formule

$$(A^{-1})_{ji} = \boxed{x_j = \frac{\det A_j(\overrightarrow{e}_i)}{\det A} = \frac{(-1)^{i+j}\det A_{ij}}{\det A} = \frac{C_{ij}}{\det A}}$$

On calcule la i-ème colonne de la matrice $A \cdot \dfrac{1}{\det A}(\mathrm{Com} A)^T$:

$$A \cdot \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{i1} \\ \vdots \\ C_{in} \end{pmatrix} = A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e}_i$$

Ainsi $A \cdot \dfrac{1}{\det A}(\mathrm{Com} A)^T = I_n$. $\square$

3.3.4 Exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A^{-1}$. Qui est b_{23} ?

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_3 - C_1}{\overset{C_2 - C_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{selon } L_1}{\overset{\text{dév}}{=}}$$

$$(-1)^{1+1} 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_3 + L_2}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{selon } L_3}{\overset{\text{dév}}{=}}$$

$$\underbrace{(-1)^{3+3}}_{= 1} \cdot 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1} = -4$$

3.3.4 Exemple, suite.

$$|A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = -1$$

Conclusion: $b_{23} = \frac{1}{\det A} \cdot \left((\mathrm{Com}\,A)^T\right)_{23} = \frac{C_{32}}{\det A}$

$$= \frac{(-1)^{3+2} \cdot \det A_{32}}{\det A} = \frac{-1 \cdot (-1)}{-4}$$

$$\boxed{b_{23} = -\frac{1}{4}}$$

3.3.5 Aire d'un parallélogramme

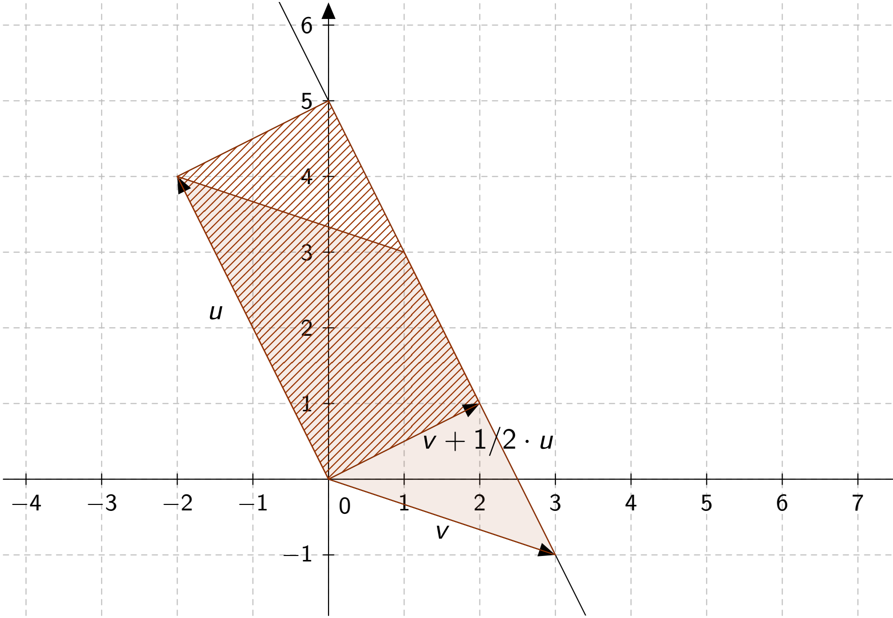
Soient $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Théorème

L'aire du parallélogramme construit sur $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ vaut $|\det A|$.

On voit sur l'illustration suivante que les deux parallélogrammes construits respectivement sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} + 1/2\overrightarrow{u}$ ont même aire, car ils ont une base commune et la même hauteur.

3.3.5 Invariance de l'aire



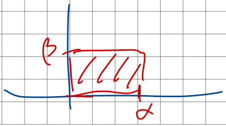
3.3.5 Preuve. Quitte à échanger les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (resp. les colonnes de A), on peut supposer que $a_{11} \neq 0$ sans changer l'aire du $\#$ (resp. sans changer la valeur absolue de $\det A$).

En effectuant une opération de type I sur les colonnes de A on obtient 0 en a_{12} sans changer $\det A$, ni l'aire du $\#$.

En ______ 2e ______

______ on se ramène à une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

Le dét vaut $\alpha \cdot \beta$, c'est l'aire du rectangle construit sur $\alpha \cdot \vec{e_1}$, $\beta \cdot \vec{e_2}$.

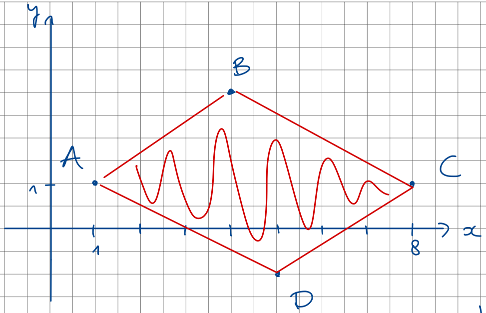


$\square$

3.3.5 Exemple.

On considère le parallélogramme dont les sommets sont $\mathcal{P}$

$A = (1;1)$, $B = (4;3)$, $C = (8;1)$ et $D = (5;-1)$.



$$\text{Aire}(\mathcal{P}) = \left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right| = \underline{\underline{14}}$$

3.3.5 Volume du parallélépipède

Théorème

Le volume du parallélépipède construit sur les colonnes d'une matrice A de taille 3×3 vaut $|\det A|$.

Remarque. L'aire d'un parallélogramme ou le volume d'un parallélépipède ne dépendent que des vecteurs qui les supportent. L'un des sommets peut être l'origine ou non. L'aire et le volume sont invariants par translation.

3.3.6 Aire et applications linéaires

Une application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transforme les vecteurs $\overrightarrow{e}_1$ et $\overrightarrow{e}_2$ en deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Ainsi, T transforme le carré unité de sommets $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$ et $(1;1)$ en un parallélogramme supporté par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

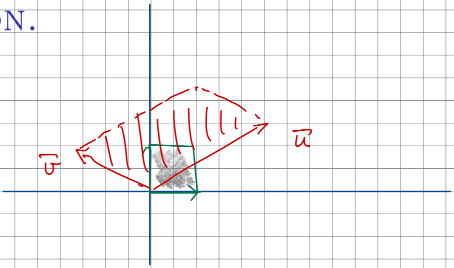
Par conséquent, si $A = (\overrightarrow{u}\ \ \overrightarrow{v})$, T transforme ce carré d'aire 1 en un parallélogramme d'aire $|\det A|$.

Théorème

Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire représentée par la matrice A. Soit S une région du plan. Alors

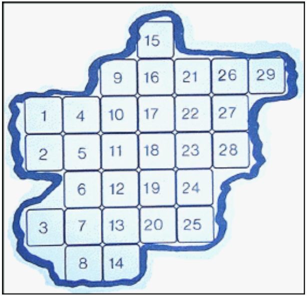
$$\boxed{\mathrm{Aire}(T(S)) = |\mathrm{det} A| \cdot \mathrm{Aire}(S)}$$

3.3.6 Illustration.



3.3.6 Idée de la preuve

L'idée est d'approximer l'aire d'une région du plan quelconque par celles de petits carrés de côté tendant vers zéro :

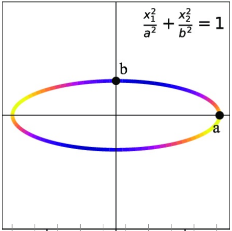


Puisque le théorème est vrai pour des carrés, il est vrai, par passage à la limite, pour d'autres régions également.

3.3.6 Exemple.

$a, b > 0$

On cherche l'aire de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. $\mathcal{E}$



$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}$$

de matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

Le cercle unité $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$.
est transformé en $\mathcal{E}$ par T, Si $(x, y) \in \mathcal{C}$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \text{ car } \frac{(ax)^2}{a^2} + \frac{(by)^2}{b^2} = x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{Aire}(\mathcal{E}) = \left|\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right| \cdot \underbrace{\text{Aire}(\mathcal{C})}_{\pi} = \pi \cdot a \cdot b$$

4.1 Générateurs : rappels

Soit W un sous-espace vectoriel de V.

1. Le sous-espace $W = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$ est le sous-espace engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$.
2. Les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ sont les générateurs de W.
3. L'ensemble $\{v_1, \ldots, v_k\}$ forme une partie génératrice de W.

Exemple. Il existe en général plusieurs parties génératrices :

$$W = \mathrm{Vect}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

EXEMPLE. $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W$, c'est $2\vec{u} + 3\vec{v} + 1.\vec{w}$

aussi $3\vec{u} + 2\vec{v}$

Cette écriture n'est pas unique.

4.3.1 Parties libres : rappels

Soit W un sous-espace vectoriel de V.

1. Les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ de W sont linéairement indépendants si la seule combinaison linéaire $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ qui donne le vecteur nul est la combinaison linéaire triviale :
   $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.
2. On dit que l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est une partie libre de W.

Définition

Une famille ordonnée de vecteurs $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_k)$ de W est une base de W si c'est une partie libre qui engendre W.

4.3.2 Bases canoniques

1. Le cas de $\mathbb{R}^n$. La base *canonique* est

$$\boxed{\mathcal{C}an = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n)}$$

2. Le cas de $\mathbb{P}_n$. La base *canonique* est

$$\boxed{\mathcal{C}an = (1, t, t^2, \ldots, t^n)}$$

3. Le cas de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. La base *canonique* est

$$\boxed{\mathcal{C}an = (e_{11}, \ldots, e_{1n}, e_{21}, \ldots, e_{m1}, \ldots, e_{mn})}$$

   où e_{ij} est la matrice constituée de zéros, sauf le coefficients (i, j) qui vaut 1.